

Title	二, 三ノJetニ就テ
Author(s)	佐藤, 常三
Citation	全国紙上数学談話会. 233 p.841-p.850
Issue Date	1942-03-18
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74948
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1017. 二, 三 / *let* = 就テ

(東京芝浦豊田理化学研究所佐々木研究室)

佐 藤 常 三

ハ シ が キ

$Z=0$ を中心トスル単位円周上ニ於ケル $w(Z)$ ノ実部分
ヲ $\phi(\theta)$ (但シ $Z=e^{i\theta}$ トカク) トスレバ, $w(Z)$ ハ

$$(1) \quad w(Z) = i\beta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) \frac{1+Ze^{-i\theta}}{1-Ze^{-i\theta}} d\theta.$$

$$w(0) = \alpha_0 + i\beta_0$$

デ表ハサレル。Villat ハ コノ公式ヲ基礎トシテ, 物体ニ
流体ガ突キ當ル場合ノ問題ヲ論ジテキル。(Leçons sur
L'hydrodynamique, 1926)

(1) ノ実部分ヲトレバ, 明ラカ = Poisson 積分トナ
ル。

$\phi(\theta)$ ガ $\theta = \theta_0$ デ第一種ノ不連続性ヲ呈示スル例ト
シテ今

$$\begin{cases} \phi(\theta) = \phi(\theta_0 - 0) = \alpha, & 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}); \\ \phi(\theta) = \phi(\theta_0 + 0) = \beta, & \theta_0 < \theta \leq \pi; \\ \phi(2\pi - \theta) = \phi(\theta) \end{cases}$$

ナル如キニノヲ與ヘテミヨウ。(1) ノ右辺ヲ計算スレバ

$$(2) \quad w(Z_1) = w(0) - \frac{2(\alpha - \beta)}{\pi} \theta_0 + \frac{\alpha - \beta}{i\pi} \log \frac{Z - e^{i\theta_0}}{Z - e^{-i\theta_0}}.$$

$\pi \geq \theta > \theta_0$ デハ

$$Rw(e^{i\theta}) = R\left[w(0) - \frac{\alpha - \beta}{\pi} \theta_0\right];$$

$$\theta_0 > \theta \geq 0 \text{ デハ} \quad = R\left[w(0) + (\alpha - \beta) - \frac{\alpha - \beta}{\pi} \theta_0\right]$$

トナルカラ $\theta = \theta_0$ デ $\beta - \alpha$ ナル jump ヲスル. (1) = 於
テ $\phi(\theta)$ ヲ與ヘタダケデハ $w(z)$ ハ附加常数ガ定マラナイ、
吾々ノ條件ハ

$$Rw(0) - \frac{\alpha - \beta}{\pi} \theta_0 = \beta, \quad R(w(0) + (\alpha - \beta) - \frac{\alpha - \beta}{\pi} \theta_0) = \alpha$$

デアルカラ

$$Rw(0) = \beta + \frac{\alpha - \beta}{\pi} \theta_0 = \frac{1}{\pi} \{ \alpha \theta_0 + (\pi - \theta_0) \beta \}$$

デナケレバナラナイ。

特ニ $w(0) = 0$ デアルタメニハ

$$\alpha \theta_0 + (\pi - \theta_0) \beta = 0$$

ナルコトヲ要シ、明カニ α, β ハ互ニ異符号ナルコトガ要求
サレル。

不連続流れ

二次元理想流体ノ運動ニ於テ速度ポテンシャルヲ ϕ ,
流れノ函数ヲ ψ トカキ、速度ヲ u, v ニスル x, y - 軸 (z - 平
面上ノ) 方向ノ分値ヲ u, v トカケバ、次ノ如キ關係ガア
ル。

$$\left\{ \begin{aligned} w = f(z) = \phi + i\psi, \quad \frac{dw}{dz} = -u + iv; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; \\ \frac{dw}{dz} = -e^{-i\omega}, \quad w = \theta + i\tau, \quad \varphi = e^{\tau} \\ \theta \text{ハ速度ベクトルガ} x\text{-軸トナス角デアール。} \end{array} \right.$$

今吾々ハ流れガ物体ニアタル場合ニ生ズル流れ線問題ニ所謂 Kirchhoff-Idelmholtz ノ古典的理論ヲ用ヒル、デアールガ、今迄ノ教科書流ノ参考書々諸種ノ文献ニ記載サレテアル hodograph 法々 Schwarz-Christoffel 変換法等デハ、ソノ手順ガ極メテ複雑デ、殊ニ是レ等ノ変換法ノ途次ニ於ケル常数決定ガ自然的デナイヤウニ思ヘル。ソコデ私ハ Villat ノ流儀ニ倣ツテ若干ノ創意ヲ加ヘツコニ、三ノ問題ヲ繰リ上げテミヨウト思フ、併シ私ハ専門家デナイカラ聞ノ拔ケタトコロハ、是非皆様ノ御教示ヲ仰ヤタイ。

Plane Orifice

下ノ圖ノ如キ場合ノ研究デアール。上圖ヲ對称ニ折り返セバ下

圖ノ如キ場合ノ問題トナル。

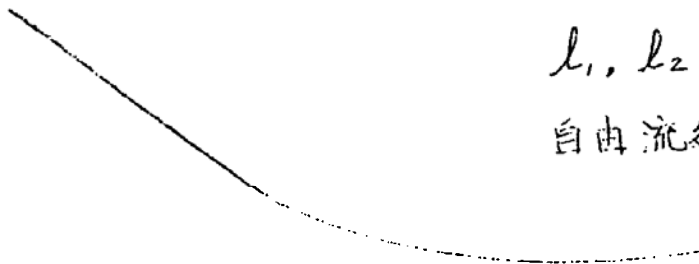
l_1, l_2 ハ壁, λ_1, λ_2 ハ

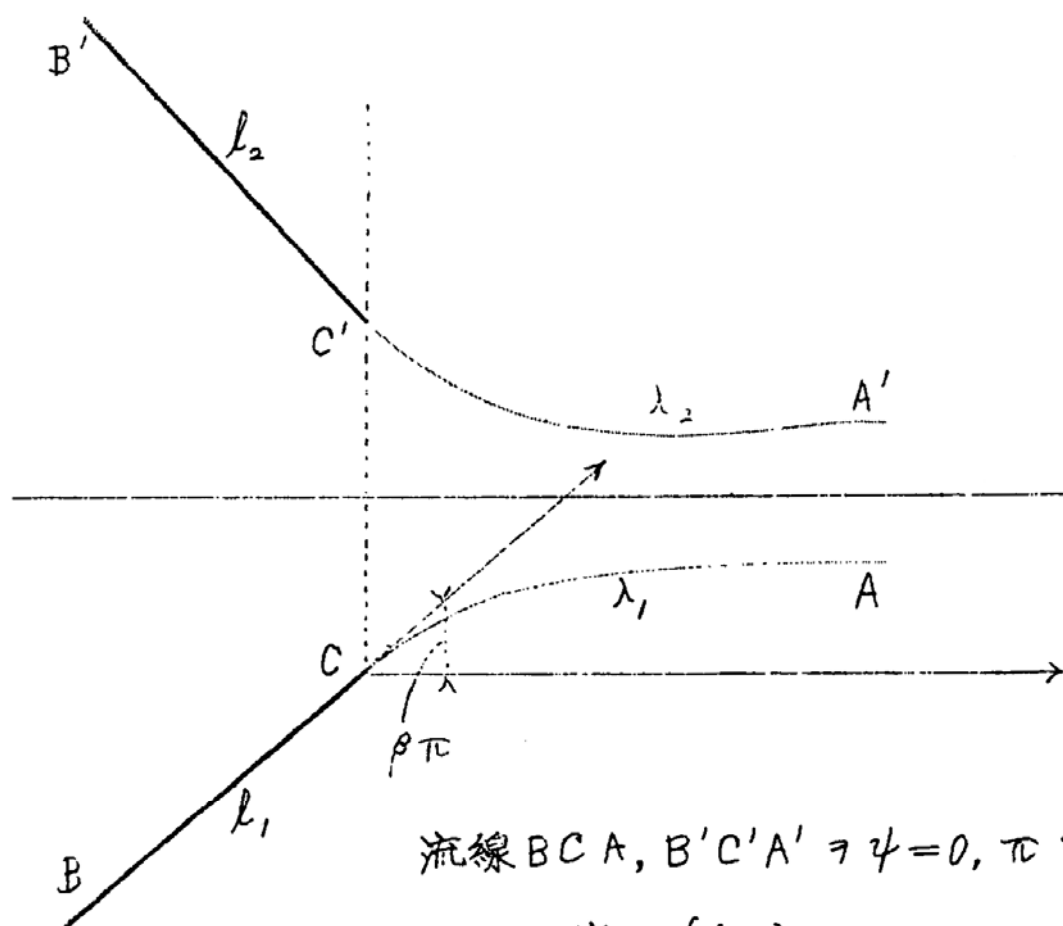
自由流れ線, β ハ壁ノ尖端

C = 於ケル自

由流れ線ノ方向

角デアール。





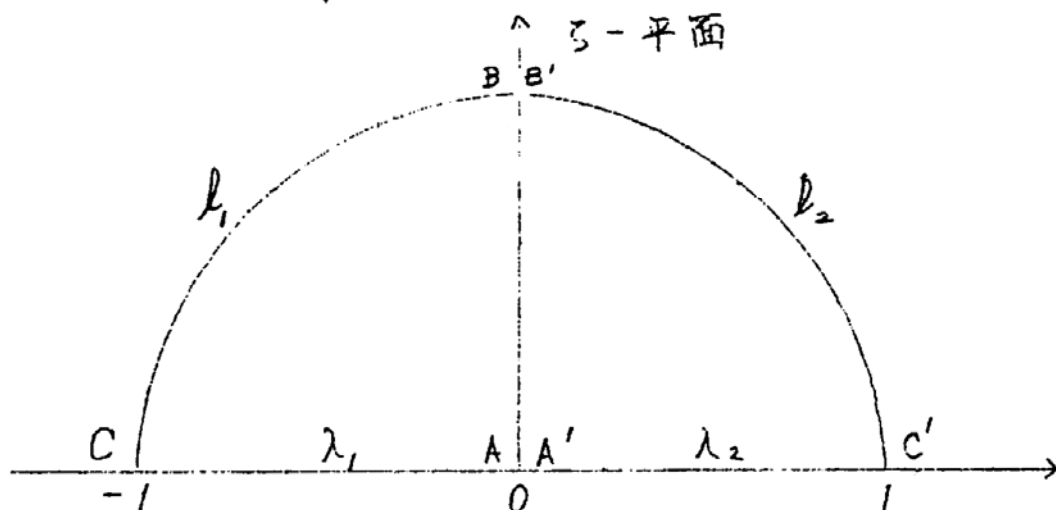
ニヨツテ w -平面上ニ對應サセテ, サラニユノ端狀領域ヲ

$$w_1 = e^w$$

ニヨツテ w_1 -平面上ノ上半面ニ寫シ, 更ニ又

$$w_1 = -\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$$

ニヨツテ ζ -平面上ノ單位円内ニ寫セバ, ソノ對應關係ハ下ノ圖ノ如クナル。圖ニ於テ



$$l_1 \text{ 上デハ } \theta = \beta \pi ;$$

$$l_2 \text{ 上デハ } \theta = -\beta \pi$$

$$\lambda_1 \text{ 及ビ } \lambda_2 \text{ 上デハ } \tau = 0 \quad (q=1)$$

w が ζ の函数トミテ

$$R_w(e^{i\sigma}) = \theta = \phi(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq \pi)$$

トカケバ, 實軸デハ $w(\zeta)$ ハ 實數値ヲトルカラ $\phi(2\pi - \sigma) = \phi(\sigma)$ ト定義スレバ, $w(\zeta)$ = 鏡像ノ原理ヲ適用スルコトが出来ル。

(2) カラ

$$(2') \quad w(\zeta) = 2\beta\pi - \frac{2\beta}{i} \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad (w(0) = 0)$$

故ニ

$$dz = -e^{iw} dw = e^{2\beta\pi i} \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^{2\beta} \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

今自由流線 λ_1 = ツイテ考ヘルコトニスル。

$$\frac{\zeta + i}{\zeta - i} = e^{-it} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \pi \right)$$

トオケバ

$$\cos t = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad \sin t = \frac{-2\zeta}{\zeta^2 + 1}, \quad dt = \frac{2}{\zeta^2 + 1} d\zeta$$

デアルカラ

$$dZ = -e^{i\beta\pi i} (e^{-2\beta t i} \cos t \, t \, dt)$$

トカケル。 $Z=0$ 7 $t = \frac{\pi}{2}$ = 對應スル加クエリムヲ
ラバ

$$(3) \quad Z = - \int_{\frac{\pi}{2}}^t \left\{ \cos 2\beta(\pi-t) + i \sin 2\beta(\pi-t) \right\} \cot t \, dt$$

又ハ實, 虚部 = 分テハ

$$(3') \quad \begin{cases} x = - \int_{\frac{\pi}{2}}^t \cos 2\beta(\pi-t) \cot t \, dt, \\ y = - \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin 2\beta(\pi-t) \cot t \, dt, \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \pi \right) \end{cases}$$

コレ流線入, 1 方程式デアル.

$$\beta = \frac{1}{6} = \text{對シテハ}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2} \log \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - 2 \cos \frac{\eta}{2} \\ \quad - \frac{1}{2} \log \frac{2 \cos \frac{\eta}{3} - 1}{2 \cos \frac{\eta}{3} + 1} - \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \frac{\eta}{3}}{1 + \cos \frac{\eta}{3}}, \\ y = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 3 \sin \frac{\eta}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3} - 2 \sin \frac{\eta}{2}}{\sqrt{3} + 2 \sin \frac{\eta}{2}}, \end{cases}$$

$$[0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}]$$

$$\beta = \frac{1}{4} = \text{對シテハ}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 2 \cos \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \frac{\eta}{2}}{1 + \cos \frac{\eta}{2}}, \\ y = \sqrt{2} - \log \tan \frac{3}{8} \pi - 2 \sin \frac{\eta}{2} + \log \tan \frac{\eta + \pi}{4} \end{cases}$$

$$[0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}]$$

$$\beta = \frac{1}{3} = \text{對シテハ}$$

$$(6) \begin{cases} x = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} \log 2 - 3 \cos^2 \frac{\eta}{3} - \frac{3}{2} \log \sin \frac{\eta}{3} + \frac{1}{2} \log \sin \eta, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{2} - \log 2 \right) - \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3} \eta + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{\eta}{3}}{\sqrt{3} - \tan \frac{\eta}{3}}, \end{cases}$$

$$[0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}]$$

$$\beta = \frac{1}{2} = \text{對シテハ}$$

$$(7) \begin{cases} x = -\log \tan \frac{\eta}{2} - \cos \eta, \\ y = 1 - \sin \eta, \end{cases} \quad [0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}]$$

$$\beta = 1 = \text{對シテハ}$$

$$(8) \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \log \sin \eta - \frac{1}{2} \cos 2\eta, \\ y = \frac{\pi}{2} - \eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta, \end{cases} \quad [0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}]$$

(7) 及ビ (8) ハ普通ノ参考書ニ掲ゲラレテアル例デアアル。
前者ハ無限ニ松イ水槽ノ底ニアケラレタ orifice カラ流体
が自由噴出スルトキノ流線デアリ、後者ハ Borda,
mouth-piece ノ場合デアアル。

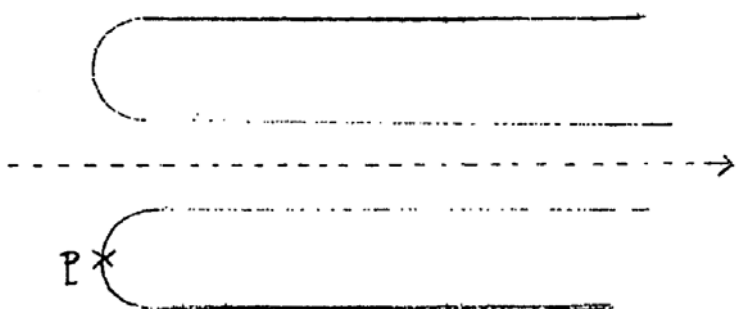
流線ノ intrinsic equation ハ

$$ds = |dz| = -\cot \eta d\eta$$

ヲ積分スレバ

$$S = \log(\operatorname{cosec} \eta) \quad \text{又ハ} \quad e^{-S} = \sin \eta$$

$$(0 \leq S < \infty)$$



圖ニ示スヤウナ Borda
ノ mouth-piece,
場合ニハ P 点ノヤウ
ニ突き出ル場所ガ生

アル。如何ナル壁ノ傾角 β = 對シテ、如何ナル坐標ヲ有
シカヲシラベタミヨウ。流線ノ方向角ヲ θ トスレバ

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \cos 2\beta \eta, \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds} = \sin 2\beta \eta$$

ソコデ $\theta = \frac{\pi}{2}$ + ル如キ位置が生ズルタメニハ、 $2\beta \eta = \frac{\pi}{2}$,
 $\eta = \frac{\pi}{4\beta}$ 故ニ β ハ $1 \geq \frac{1}{2\beta} > 0$ + ルコトヲ要ス。シカルニ
 $0 \leq \beta \leq 1$ + ルヲ以テ $1 \geq \beta \geq \frac{1}{2}$. 從ツテ問題ノ如キ点ハ
 $1 \geq \beta \geq \frac{1}{2}$ + ル限り常ニ存在シ、ソノ位置ハ $\eta = \frac{\pi}{4\beta}$ トオ
イテ計算サレル。

例ヘバ Borda ノ唇口ノ場合ニハ $\eta = \frac{\pi}{4}$; コレヲ (8) =
代入スレバ

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \doteq -0.1534, \\ y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \doteq 0.2854 \end{cases}$$

Coefficient of Contraction (略号 C.C.)

實際ハ contracted vein ハ噴出孔ノ附近ニ生ズル
ノデアリガ、理論上デハ

$$C_\beta = \frac{\pi}{\pi + 2\gamma_\infty}$$

ト定義サレル。 γ_∞ ハ無限遠方ニ於ケル γ ノ値デアリ、 C_β
ハ β = 應ズル C.C. ノ値ト云フ意味デアル。(4) — (8) ノ式
ヲ用ヒレバ容易ニ

β	0	$1/6$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1
y_{∞}	0	$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\sqrt{2} - \log \tan \frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} (\frac{3}{2} - \log 2)$	1	$\frac{\pi}{2}$
C_{β}	1	0.787	0.746	0.691	0.611	0.5

近 似 式

(3) 1代リニソノ近似式ヲ採ル. Fourier 級数ニ積分下ノ展開シテ最初ノ三、四ノ項ダケヲトルト

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \left\{ \begin{aligned}
 x &= -\frac{4\beta \sin 2\beta\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{8\beta^2} \log \sin t + \frac{1}{4\beta^2-1} \left(\log \tan \frac{t}{2} + \cos t \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4\beta^2-4} \left(\log \sin t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\beta^2-9} \left(\log \tan \frac{t}{2} + \cos t + \frac{4}{3} \cos^3 t \right) \right\}, \\
 y &= \frac{2 \sin 2\beta\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{4\beta^2-1} (\sin t - 1) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2\beta^2-2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\beta^2-9} (6 \sin t + \sin 3t - 5) \right\}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

コレヨリ

$$y_{\infty} = \frac{2 \sin 2\beta\pi}{\pi} \left(\frac{\pi}{4(\beta^2-1)} - \frac{1}{4\beta^2-1} - \frac{5}{4\beta^2-9} \right)$$

又コレヨリ C.C. ノ C_{β} ヲ計算シテミルト

β	$0/18$	$1/18$	$2/18$	$3/18$	$4/18$	$5/18$	$6/18$	$7/18$	$8/18$	$9/18$	$10/18$	$11/18$
C_p	1	0.987	0.824	0.763	0.717	0.698	0.681	0.655	0.635	0.621	0.611	0.602

$12/18$	$13/18$	$14/18$	$15/18$	$16/18$	$17/18$	$18/18$
0.594	0.586	0.576	0.564	0.549	0.516	0.5

近似速度 $|\zeta + i| = \rho_1, |\zeta - i| = \rho_2$ トオケハ

$\zeta \rightarrow B, B'$ トキハ

(2') カラ $y[w(\zeta)] = 2\beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} (\rho_2 \rightarrow 0), w = \theta + i\tau$

$$\therefore q = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{2\beta} (\rho_2 \rightarrow 0) \quad \therefore q \rightarrow 0$$

———— (ツヅク) ————